

# Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2019,  
Convocatoria ordinaria

[mentoor.es](http://mentoor.es)



## Problema A.1. Álgebra

Se dan la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$  y una matriz cuadrada  $B$  de orden 3 tal que  $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$ .

- El rango de la matriz  $A$  en función del parámetro  $a$  y el determinante de la matriz  $2A^{-1}$  cuando  $a=1$ .
- Todas las soluciones del sistema de ecuaciones  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  cuando  $a=-1$ .
- La comprobación de que  $B$  es invertible, encontrando  $m$  y  $n$  tales que  $B^{-1} = mB + nI$ .

**Solución:**

- El rango de la matriz  $A$  en función del parámetro  $a$  y el determinante de la matriz  $2A^{-1}$  cuando  $a=1$ .

El rango de  $A$  viene determinado por su determinante.

$$|A| = a(a+1) - (a-1)(-4) - 3a(a+1) = a^2 + a + 4a - 4 - 3a^2 - 3a = -2a^2 + 2a - 4$$

Revisando el cálculo:

$$|A| = 1(a(a+1) - 2(a-1)) + a(-2(a-1) - (-3)(a+1)) = a^2 + a - 2a + 2 + a(-2a + 2 + 3a + 3) = a^2 - a + 2 + a(a+5) = 2a^2 + 4a + 2 = 2(a+1)^2. \quad |A| = 0 \iff a = -1.$$

Si  $a \neq -1$ ,  $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$ .

Si  $a = -1$ ,  $|A| = 0$ ,  $\text{Rg}(A) = 2$  ya que  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$  pero  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ .

Para  $a = 1$ ,  $|A| = 2(1+1)^2 = 8$ .

$$\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = 8 \frac{1}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

Si  $a \neq -1$ ,  $\text{Rg}(A) = 3$ . Si  $a = -1$ ,  $\text{Rg}(A) = 2$ . Para  $a=1$ ,  $\det(2A^{-1}) = 1$ .

- Todas las soluciones del sistema de ecuaciones  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  cuando  $a=-1$ .

Para  $a = -1$ , el sistema es compatible indeterminado.  $\text{Rg}(A) = 2$ ,  $\text{Rg}(A^*) = 2$ .

$$A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

La 2ª fila es -2 veces la 1ª. Usamos la 1ª y 3ª ecuación:

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

De la 1ª,  $x = z - 1$ . Sustituyendo en la 3ª:  $-3(z-1) - 2y - z = 0 \implies 3 - 4z = 2y \implies y = \frac{3-4z}{2}$ .

Sea  $z = \lambda \in \mathbb{R}$ .



La solución es  $(x, y, z) = (\lambda - 1, \frac{3}{2} - 2\lambda, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

c) La comprobación de que **B** es invertible, encontrando  $m$  y  $n$  tales que  $B^{-1} = mB + nI$ .

$$B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \implies B^2 + 2B = \frac{1}{3}I.$$

$$\text{Sacando factor común } B \text{ por la izquierda: } B(B + 2I) = \frac{1}{3}I.$$

$$\text{Multiplicando por } 3: B(3(B + 2I)) = I \implies B(3B + 6I) = I.$$

Esto demuestra que **B** es invertible y su inversa es  $B^{-1} = 3B + 6I$ .

**B** es invertible.  $B^{-1} = 3B + 6I$ , por tanto  $m = 3, n = 6$ .



## Problema A.2. Geometría

Consideramos en el espacio las rectas  $r : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$  y  $s : x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ .

- La ecuación del plano que contiene las rectas  $r$  y  $s$ .
- La recta que pasa por  $P = (0, -1, 2)$  y corta perpendicularmente a la recta  $r$ .
- El valor que deben tener los parámetros reales  $a$  y  $b$  para que la recta  $s$  esté contenida en el plano  $\pi : x - 2y + az = b$ .

Solución:

- La ecuación del plano que contiene las rectas  $r$  y  $s$ .

De  $r$ :  $\vec{v}_r = (1, 1, 2), P_r(0, 3, 3)$ . De  $s$ :  $\vec{v}_s = (1, 1, 2), P_s(0, -1, 2)$ .

Los vectores son iguales, las rectas son paralelas. El plano  $\pi$  está definido por  $P_r, \vec{v}_r$  y  $P_r\vec{P}_s = (0, -4, -1)$ .

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies 7x + y - 4z + 9 = 0$$

$$\boxed{\text{El plano es } 7x + y - 4z + 9 = 0.}$$

- La recta que pasa por  $P = (0, -1, 2)$  y corta perpendicularmente a la recta  $r$ .

1. Plano  $\pi'$  perpendicular a  $r$  que pasa por  $P$ :  $\vec{n}_{\pi'} = \vec{v}_r = (1, 1, 2)$ . Ecuación:  $x + y + 2z + D = 0$ . Pasa por  $P(0, -1, 2) \implies 0 - 1 + 4 + D = 0 \implies D = -3$ . Plano:  $x + y + 2z - 3 = 0$ .

2. Punto de corte  $Q$  de  $r$  y  $\pi'$ :  $r$  en paramétricas es  $(t, 3+t, 3+2t)$ .

$t + (3+t) + 2(3+2t) - 3 = 0 \implies 6t + 6 = 0 \implies t = -1$ .  $Q$  es  $(-1, 2, 1)$ .

3. La recta buscada pasa por  $P$  y  $Q$ .  $\vec{PQ} = (-1, 3, -1)$ .

$$\boxed{\text{La recta es } \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}.}$$

- El valor que deben tener los parámetros reales  $a$  y  $b$  para que la recta  $s$  esté contenida en el plano  $\pi : x - 2y + az = b$ .

$\vec{v}_s = (1, 1, 2)$  debe ser perpendicular a  $\vec{n}_\pi = (1, -2, a)$ :  $(1, 1, 2) \cdot (1, -2, a) = 1 - 2 + 2a = 0 \implies a = 1/2$ .

Un punto de  $s$ ,  $P_s(0, -1, 2)$ , debe estar en  $\pi$ :  $0 - 2(-1) + \frac{1}{2}(2) = b \implies 2 + 1 = b \implies b = 3$ .

$$\boxed{a = 1/2 \text{ y } b = 3.}$$



### Problema A.3. Análisis

Se considera la función  $f(x) = xe^{-x^2}$ .

- Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función.
- La representación gráfica de la curva  $y = f(x)$ .
- El valor del parámetro  $a$  para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en  $[0,1]$  a la función  $g(x) = f(x) + ax$ .
- El valor de las integrales indefinidas  $\int f(x)dx$  y  $\int xe^{-x}dx$ .

Solución:

- Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función.  
Dominio  $\mathbb{R}$ . No hay A. Verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{-x^2} = 0 \implies \text{A.H. en } y = 0$$

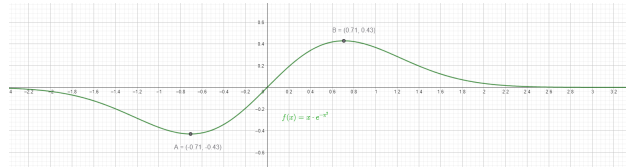
$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2). \quad f'(x) = 0 \implies x = \pm 1/\sqrt{2}.$$

<b>Intervalo</b>	$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, \infty)$
<b>Signo <math>f'(x)</math></b>	-	+	-
<b><math>f(x)</math></b>	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Mínimo relativo en  $x = -1/\sqrt{2}$ . Máximo relativo en  $x = 1/\sqrt{2}$ .

**A.H.:  $y = 0$ . Crece:  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Mín/Máx en  $\mp \frac{\sqrt{2}}{2}$ .**

- La representación gráfica de la curva  $y = f(x)$ .  
La función es impar, pasa por  $(0,0)$ , tiene los extremos calculados y se acerca a  $y = 0$  en el infinito.



- El valor del parámetro  $a$  para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en  $[0,1]$  a la función  $g(x) = f(x) + ax$ .

Se requiere  $g(0) = g(1)$ .  $g(x) = xe^{-x^2} + ax$ .

$$g(0) = 0. \quad g(1) = e^{-1} + a. \quad e^{-1} + a = 0 \implies a = -1/e.$$

$a = -1/e.$

- El valor de las integrales indefinidas  $\int f(x)dx$  y  $\int xe^{-x}dx$ .

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \quad (\text{con } u = -x^2)$$

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \quad (\text{por partes})$$

$\int f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C. \quad \int xe^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + C.$

## Problema B.1. Álgebra

Se da el sistema 
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases} .$$

- Los valores de  $\alpha$  para los que el sistema es compatible y los valores de  $\alpha$  para los que el sistema es incompatible.
- Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.
- La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

**Solución:**

- Los valores de  $\alpha$  para los que el sistema es compatible y los valores de  $\alpha$  para los que el sistema es incompatible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}. \quad |A| = 0 \text{ y } \text{Rg}(A) = 2.$$

$$A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array} \right).$$

$\det(C_1, C_2, C_4) = \alpha - 14$ . Para que  $\text{Rg}(A^*) = 2$ , se necesita  $\alpha = 14$ .

**Compatible si  $\alpha = 14$ . Incompatible si  $\alpha \neq 14$ .**

- Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

Para  $\alpha = 14$ , el sistema es S.C.I.  $F_3 = 2F_2 + F_1$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \end{cases} . \text{ Sea } z = \lambda. \\ x = 11 + \lambda, y = -7 - 2\lambda, z = \lambda.$$

**La solución es  $(11 + \lambda, -7 - 2\lambda, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .**

- La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{pmatrix}, \text{ con } k \neq 11.$$

$|A'| = k - 11$ . Como  $k \neq 11$ ,  $|A'| \neq 0$ .

El nuevo sistema será siempre **Compatible Determinado**.

**El nuevo sistema es siempre Compatible Determinado.**



## Problema B.2. Geometría

Sea  $\pi$  el plano de ecuación  $9x + 12y + 20z = 180$ .

- Las ecuaciones de los dos planos paralelos a  $\pi$  que distan 4 unidades de  $\pi$ .
- Los puntos A, B y C intersección del plano  $\pi$  con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ .
- El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

Solución:

- a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a  $\pi$  que distan 4 unidades de  $\pi$ .

Los planos son  $9x + 12y + 20z = d'$ . La distancia entre ellos es  $\frac{|-180-d'|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}} = \frac{|180+d'|}{25} = 4$ .

$$|180 + d'| = 100 \implies 180 + d' = \pm 100.$$

$$d' = -80 \text{ y } d' = -280.$$

Los planos son  $9x + 12y + 20z + 80 = 0$  y  $9x + 12y + 20z + 280 = 0$ .

- b) Los puntos A, B y C intersección del plano  $\pi$  con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ .

$$A(20, 0, 0), B(0, 15, 0), C(0, 0, 9).$$

$$\vec{AB} = (-20, 15, 0), \vec{AC} = (-20, 0, 9).$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{400}{\sqrt{625} \sqrt{481}} = \frac{400}{25 \sqrt{481}} = \frac{16}{\sqrt{481}}$$

$$A(20,0,0), B(0,15,0), C(0,0,9). \theta = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{481}}\right).$$

- c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

$$V = \frac{1}{6} |\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |2700| = 450$$

El volumen es 450 unidades cúbicas.

### Problema B.3. Análisis

Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son  $(0, 0)$  y  $(250, 0)$ . A se desplaza sobre el eje OY a 30 km/h y, simultáneamente, B se desplaza sobre el eje OX a 40 km/h.

- La distancia  $f(t)$  entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo  $t$  en horas desde que comenzaron a desplazarse.
- El tiempo  $T$  que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f$  a lo largo del trayecto.
- Los valores de  $t$  para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Solución:

- La distancia  $f(t)$  entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo  $t$  en horas desde que comenzaron a desplazarse.

Posición de A:  $A(t) = (0, 30t)$ . Posición de B:  $B(t) = (250 - 40t, 0)$ .

$$f(t) = \sqrt{(250 - 40t)^2 + (30t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}$$

$$f(t) = \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}.$$

- El tiempo  $T$  que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f$  a lo largo del trayecto.

$$T_A = (375/2)/30 = 6.25 \text{ h. } T_B = 250/40 = 6.25 \text{ h. } T = 6.25.$$

El crecimiento de  $f(t)$  es el de su radicando,  $g(t) = 2500t^2 - 20000t + 62500$ .

$$g'(t) = 5000t - 20000 = 0 \implies t = 4.$$

Intervalo	$(0, 4)$	$(4, 6.25)$
Signo $f'(t)$	-	+
$f(t)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

$$T = 6.25 \text{ horas. Decrece en } [0, 4). \text{ Crece en } (4, 6.25].$$

- Los valores de  $t$  para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

El mínimo absoluto está en el punto crítico  $t = 4$  h.

$$f(4) = \sqrt{2500(16) - 20000(4) + 62500} = 150 \text{ km}$$

El máximo absoluto está en los extremos del intervalo  $[0, 6.25]$ .

$$f(0) = 250 \text{ km. } f(6.25) = 187.5 \text{ km. El máximo es } f(0).$$

$$\text{Distancia mínima: 150 km a las 4h. Distancia máxima: 250 km en } t=0\text{h.}$$